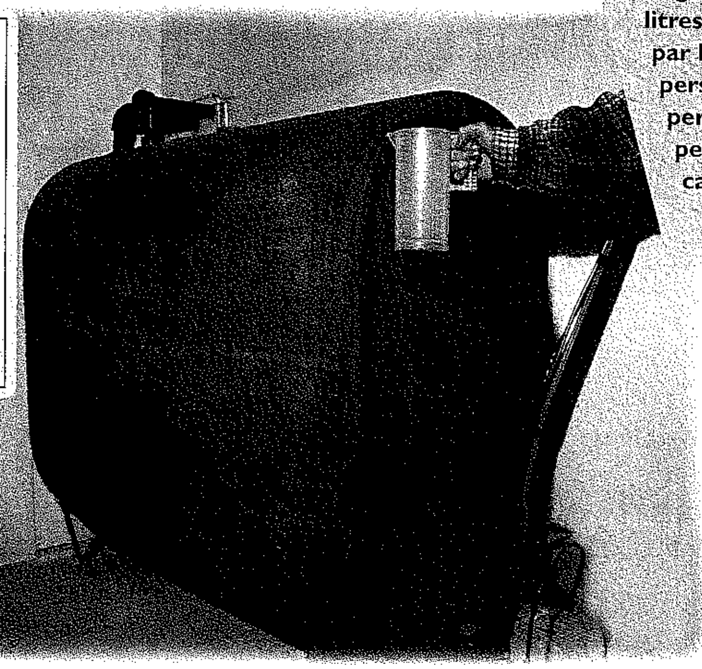
Calculer des puissances de puissances

2.3 Comparons des préfixes de mesure

On se sert de préfixes pour indiquer la grandeur relative d'une mesure. Le tableau ci-dessous donne quelques préfixes utilisés pour le litre. Par exemple, un kilolitre (kL) vaut 10^3 ou 1000 fois un litre.



Mise en train

En six ans, le cœur humain pompe un gigalitre ou 10^9 L de sang. En six ans, combien de litres de sang sont pompés par les cœurs de mille personnes? d'un million de personnes? d'un milliard de personnes? Explique tes calculs.

Tableau des préfixes métriques

Préfixe		kilo	méga	giga	téra	péta	exa	zetta	yotta
Symbole	L	kL	ML	GL	TL	PL	EL	ZL	YL
N^{bre} de litres	10^0	10^3	10^6	10^9	10^{12}	10^{15}	10^{18}	10^{21}	10^{24}

Explore la question

1. a) Combien de litres contient un mégalitre? un gigalitre?
Exprime chaque réponse sous forme de puissance et en notation normale.
b) On peut considérer le mégalitre comme le *carré* d'un kilolitre, car $10^3 \times 10^3 = 10^6$ et $10^3 \times 10^3 = (10^3)^2$.
Qu'est-ce que cela indique au sujet de la relation entre 10^6 et $(10^3)^2$?
c) Explique pourquoi on peut considérer le gigalitre comme le *cube* d'un kilolitre.
Qu'est-ce que cela indique sur la relation entre 10^9 et $(10^3)^3$?

2. Trouve les exposants qui manquent.

a) $(10^2)^3 = 10^2 \times 10^2 \times 10^2$
$= 10^{\square}$

b) $(10^3)^4 = 10^{\square} \times 10^{\square} \times 10^{\square} \times 10^{\square}$
$= 10^{\square}$

c) $(10^4)^3 = 10^{\square} \times 10^{\square} \times 10^{\square}$
$= 10^{\square}$

d) $(2^{\square})^3 = 2^6 \times 2^6 \times 2^6$
$= 2^{\square}$

e) $(3^3)^{\square} = 3^{\square} \times 3^{\square} \times 3^{\square} \times 3^{\square}$
$= 3^{\square}$

f) $[(-5)^4]^3 = (-5)^{\square} \times (-5)^{\square} \times (-5)^{\square}$
$= (-5)^{\square}$

Les expressions $(10^3)^2$ et $(10^3)^3$ s'appellent **puissances de puissances** parce que la base de chaque puissance est déjà une puissance.

Passe à l'action

1. Trouve les exposants qui manquent.

a) $10^{20} = (10^4)^{\square}$ **b)** $(-5)^{15} = [(-5)^{\square}]^3$

c) $(10^7)^3 = 10^{\square}$ **d)** $3^{24} = (3^{\square})^{\square}$

2. Formule une loi pour transformer une puissance de puissance, $(a^m)^n$, en puissance à un seul exposant.

3. Exprime chaque puissance de puissance sous forme de puissance à un seul exposant et trouve son nom dans le tableau ci-dessous.

a) Il y a environ $(10^3)^5$ fourmis sur Terre.

b) Dans un flocon de neige, il y a environ $(10^9)^2$ molécules.

c) En quatre mois, la descendance d'un couple de mouches peut s'élever à $(10^7)^3$ mouches.

Noms des nombres très élevés

10^9	un milliard	10^{18}	un trillion
10^{12}	un billion	10^{21}	un trillard
10^{15}	un billiard		

4. Explique pourquoi $(5^6)^3 = (5^3)^6$ en écrivant chaque nombre sous forme de produit de facteurs égaux.

5. Comment peut-on trouver la racine carrée de 2^{10} à l'aide de la loi $a^{mn} = (a^m)^n$?

6. Les préfixes du tableau de la page 33 servent aussi à d'autres unités métriques. Examine les colonnes *kilo* et *giga*. Tu remarques qu'un téramètre est le *carré* d'un mégamètre parce que $(10^6)^2 = 10^{12}$. Trouve des relations entre les préfixes pour compléter les énoncés suivants.

a) Le *cube* d'un mégagramme est un $\square\square\square$ gramme car $(10^{\square})^3 = 10^{\square}$.

b) Le *carré* d'un gigalitre est un $\square\square\square$ litre car $(10^{\square})^2 = 10^{\square}$.

c) Le *carré* d'un téramètre est un $\square\square\square$ mètre car $(10^{\square})^2 = 10^{\square}$.

7. La puissance de la puissance $(2^{-3})^2$ a la même valeur que la puissance 2^{-6}.

a) Pourquoi $(2^{-3})^2$ n'a-t-il pas la même valeur que $(-2)^6$?

b) Pourquoi -2^6 et $(-2)^6$ ont-ils des valeurs différentes?

8. Écris chaque expression en notation normale ou sous forme de fraction sachant que $(3^2)^4 = 6561$.

a) $(3^2)^{-4}$ **b)** $(3^{-2})^4$ **c)** $(3^{-2})^{-4}$

9. Comment peux-tu remplacer les lettres *a*, *b* et *c* par 1, 2 et 3 dans l'expression $(a^b)^c$, pour obtenir la valeur la plus élevée possible? la moins élevée possible?

Dans ton journal

On appelle *googol* le nombre correspondant à $(10^{10})^{100}$. Combien y a-t-il de zéros dans sa notation normale? Un *googolplex* s'exprime par 10^{googol}. Comment peux-tu estimer le temps qu'il faut pour écrire un *googolplex* en notation normale?

10. Trouve la valeur de *n* en supposant puis en vérifiant.

a) $(n^2)^3 = 729$ **b)** $(n^2)^4 = 256$

c) $(n^0)^{-6} = 1$ **d)** $(n^3)^4 = 1$

e) $(n^3)^2 = 64$ **f)** $(n^{-4})^2 = \frac{1}{256}$

11. Évalue ces expressions. Écris-les en notation normale.

a) $\frac{5^3}{5^2} \times 4^6 \times \frac{4^{-2}}{(4^2)^2}$

b) $(3^{-2})^{-2} + 4^5 \times \frac{4^2}{4^6}$

c) $5^{-2} \times 5^3 + \frac{(2^0)^5}{7^{-4}} \times 7^{-4}$

d) $10^{-3} \times 10^5 + (6^3)^0 - \frac{4^8}{4^7}$

12. À l'aide de la loi $a^{mn} = (a^m)^n$ et d'une calculatrice, ordonne les puissances 2^{500}, 3^{400}, 4^{300}, et 5^{200}.

a) Trouve les exposants qui manquent. Ensuite, place ces puissances en ordre décroissant. Explique ta réponse.

2^{500}	3^{400}	4^{300}	5^{200}
$(2^{\square})^{100}$	$(3^{\square})^{100}$	$(4^{\square})^{100}$	$(5^{\square})^{100}$

b) Ordonne les puissances 3^{666}, 4^{555}, 5^{444}, 6^{333}.

c) Invente un autre problème où les puissances sont à ordonner et soumets-le à une ou à un camarade.